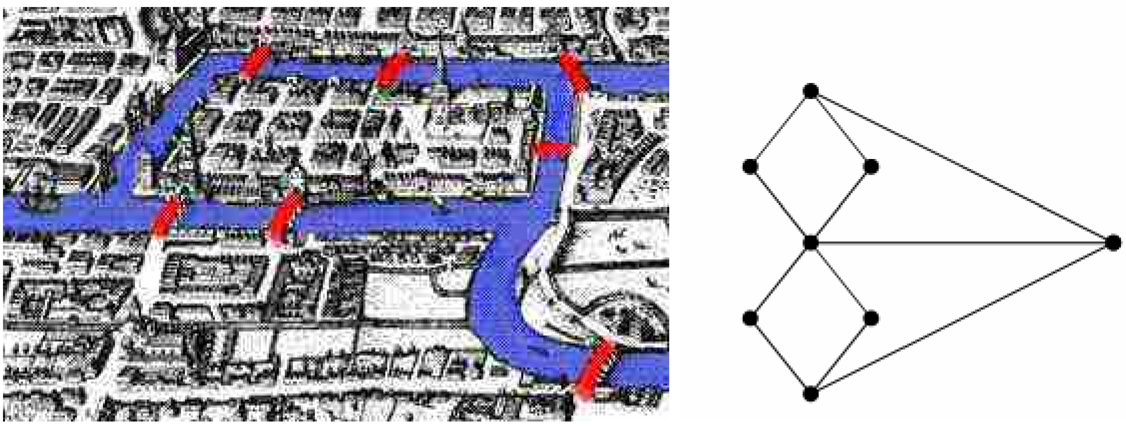
Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

Bojan Možina

30. december 2006

1 Eulerjevi grafi

Štirje deli mesta Königsberg v Prusiji so bili povezani s sedmimi mostovi (glej levi del slike 1). Zdaj se Königsberg imenuje Kaliningrad in leži v ruski enklavi z istim imenom.



Slika 1: Königsberški mostovi

Zdolgočaseni meščani so poskušali najti sprehod po mestu, pri katerem bi vsak most prečkali natanko enkrat in se na koncu vrnili v začetno točko.
Po neuspešnem poskušanju so predvidevali, da to ni mogoče, dokazati pa tega niso znali. S tem se je prvi uspešno spopadel matematik Leonhard Euler (1707-1783) in leta 1736 napisal dokaz. Ta sicer ni bil v jeziku teorije grafov.

Problem königsberških mostov si lahko predstavljamo tako: štirje deli mesta so točke grafa (štiri točke dodamo zato, da graf ostane enostaven, pri čemer problem ostane enak), mostovi pa povezave med točkami (desni del slike 1). Iščemo enostaven obhod grafa po vseh povezavah.

Eulerjev obhod je torej enostaven obhod, na katerem so vse povezave grafa, *Eulerjev sprehod* pa enostaven sprehod z isto lastnostjo. Grafu, v katerem obstaja Eulerjev obhod, bomo rekli *Eulerjev graf*, če pa obstaja Eulerjev sprehod, ga bomo poimenovali *Poleulerjev graf*. Točkam sode stopnje bomo rekli *sode* točke, grafu s samimi sodimi točkami pa *sod* graf. Podobno definiramo lihe točke.

Opomba: *Iskanje Eulerjevega sprehoda bi ustrezalo iskanju sprehoda po mestu Königsberg - preko vsakega mostu natanko enkrat, končati pa ni nujno na začetku.*

Na hitro premislimo, kdaj je graf Eulerjev. Prvi pogoj je očitno povezanost grafa. Drugi pogoj pa je, da so vse točke sode, saj če med obhodom pridemo v neko točko, moramo iz te točke tudi oditi (isto velja tudi za začetno točko, ki je enaka končni). Izkaže se, da velja tudi obratno.

Izrek 1.1 *Naj bo G povezan graf. Potem je G Eulerjev natanko tedaj, ko so vse točke grafa G sode stopnje.*

Dokaz: Pokažimo najprej potrebnost pogoja o sodih točkah. G naj ima Eulerjev obhod. Če gremo po tem obhodu, vsako povezavo prehodimo natanko enkrat in se vrnemo na začetek. Vsak obisk točke prispeva k stopnji točke število 2 (za prihod v točko in odhod iz nje). To velja tudi za začetno/končno točko. Ker vsako povezavo prehodimo natanko enkrat (ne moremo priti v točko in oditi ali dvakrat priti po isti povezavi oz. oditi po isti povezavi), mora biti stopnja točke deljiva z dva.

Zdaj pa pokažimo drugo smer. Naj ima graf G vse točke sode stopnje. Iščemo Eulerjev obhod v grafu G. Spomnimo se znanega izreka (če ima graf same sode točke, ga lahko razbijemo na unijo disjunktnih ciklov). Torej v grafu G obstaja nek cikel C.

Dokazovali bomo s pomočjo matematične indukcije po številu povezav m. Pri $m = 0$ je G enak K_1, ta je Eulerjev. Privzemimo sedaj, da ta "smer"izreka že velja za vse grafe z manj kot m povezavami. Naj ima graf G m povezav. Iz G odstranimo cikel C in dobimo nov graf, recimo mu H, kateri ima spet vse točke sode stopnje. Lahko se zgodi, da H ni povezan, ampak vsaka njegova komponenta pa je povezan graf s samimi točkami sode stopnje. Torej je po indukcijski predpostavki vsaka njegova komponenta Eulerjev graf. Poiščimo zdaj Eulerjev obhod v G. Začnemo v katerikoli točki v cikla C in se sprehajamo po njemu, dokler ne pridemo do prve komponente grafa H. Potem opravimo Eulerjev obhod te komponente in se vrnemo na cikel C. Tako nadaljujemo vzdolž C-ja in vsakič, ko pridemo do komponente grafa H, naredimo Eulerjev obhod po njej. Ko se vrnemo v začetno točko v, smo prehodili sako povezavo grafa G natanko enkrat in s tem našli Eulerjev obhod grafa G, torej je G res Eulerjev. ■

Zapišimo še Fleuryjev algoritem, ki nam pomaga najti Eulerjev obhod v Eulerjevem grafu (dokaz algoritma bomo izpustili). Fleuryjev algoritem pravi takole:

1. Izberimo si začetno točko.

2. Prečkajmo poljubno povezavo, le most izberemo samo tedaj, ko ni več druge možnosti. (Most je povezava v grafu, brez katere graf ni več povezan.)

3. Povezavo, katero smo prehodili, in vse točke, ki postanejo izolirane, odstranimo.

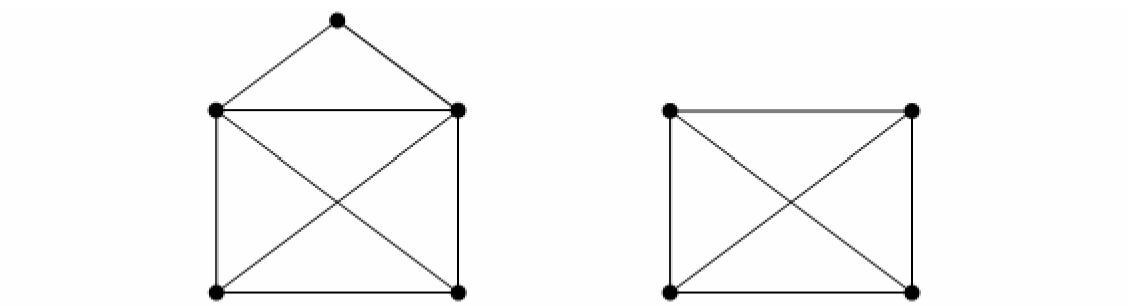
4. Ko ni nobene povezave več, končamo.

Na tem mestu se spomnimo leme o rokovanju, ki pravi, da ima vsak graf sodo mnogo lihih točk. Torej graf ne more imeti samo ene lihe točke. Dokažimo naslednje:

Trditev 1.2 *Graf je Poleulerjev natanko tedaj, ko ima največ dve točki lihe stopnje.*

Dokaz: Naj ima graf Eulerjev sprehod (predpostavimo, da nima Eulerjevega obhoda - tedaj nima nobene lihe točke) od točke u do v. Grafu dodamo povezavo e med tema točkama in dobimo Eulerjev graf, v katerem morajo biti po prejšnjem izreku vse točke sode stopnje. Odstranimo povezavo e; dobimo prvoten graf, očitno sta točki u in v edini točki lihe stopnje v grafu. Naj ima sedaj graf natanko dve lihi točki u in v. Spet dodamo povezavo e med njima. Dobimo graf s samimi točkami sode stopnje, ki je po prejšnjem izreku Eulerjev, torej v njem obstaja Eulerjev obhod. Če ponovno odstanimo povezavo e, dobimo Eulerjev sprehod, torej je graf Poleulerjev. ■

Verjetno nam je v otroštvu vsem prišla pod roke naslednja naloga ali njej podobna. Narisati je bilo treba sliko v čim manj potezah ali celo z eno potezo. Po dolgotrajnem preizkušanju smo ugotovili, da se "hišo"da narisati z eno potezo, zaprte "kuverte"pa ne.



Slika 2: "Hiša"in zaprta "kuverta"

Tudi to lahko prevedemo v teorijo grafov. "Hiša"ima dve lihi točki ostale so sode. Torej v njej obstaja Eulerjev sprehod, zato lahko narišemo vse povezave "iz prve", z eno potezo. Kuverta ima štiri lihe točke, znamo pa jo narisati v dveh potezah.
Iz teh dveh zgledov se nam že lahko dozdeva, kaj sledi.

Izrek 1.3 *Če ima povezan graf kakšno liho točko, ga lahko narišemo z najmanj* $\frac{\textit{število lihih točk}}{2}$ *potezami. Povezan graf brez lihih točk (Eulerjev) lahko narišemo z eno potezo.*

Dokaz: Imejmo graf G. Očitno mora biti vsak liha točka krajišče ene poteze (začetek ali konec). Torej število potez ne more biti manjše od $\frac{\textit{število lihih točk}}{2}$. Če graf nima lihih točk, je Eulerjev, zato ga lahko narišemo z eno potezo (še več, končamo na začetku). Naj bodo zdaj $v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k}$ lihe točke grafa G (teh je po nam dobro znanem dejstvu sodo mnogo). Grafu G dodamo povezave $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2k-1}v_{2k}$ in nov graf poimenujemo H. Graf H ima vse točke sode stopnje, zato je Eulerjev; poiščemo Eulerjev obhod. Odstranimo dodane povezave in obhod razpade na k poti oz. potez. ■

Poznavanje pojma "eulerjevost" nam lahko pomaga pri različnih tipih nalog, npr. risanje s čim manj potezami (kar smo že obravnavali), reševanje iz labirintov,... Uporabljamo jo pa tudi za vrste nalog, katere si bomo pogledali v naslednjem poglavju.

Opomba: *Eulerjeve obhode ali sprehode lahko iščemo tudi pri digrafih, pri tem moramo seveda potovati v smeri povezav.*

Digraf je Eulerjev natanko tedaj, kadar ima vsaka točka enaki vhodno in izhodno stopnjo. Digraf je Poleulerjev, kadar obstajata dve točki u in v, kjer ima u vhodno stopnjo za ena večjo od izhodne, v pa ravno obratno, vse ostale točke pa imajo enake vhodne in izhodne stopnje. Dokaz tega dvojega je zelo podoben dokazu za enostavne grafe.

2 Problem kitajskega poštarja

Kitajski matematik Meigu Guan se je ukvarjal s problemom, kako najti najkrajši cikel, po katerem bi prehodili vsako povezavo danega grafa vsaj enkrat. Predstavljal si je poštarja, ki želi prehoditi vse ulice naselja v najkrajšem času in se vrniti nazaj na pošto.

Pri tem problemu bomo upoštevali dolžino povezav oz. njihovo težo, takemu grafu bomo rekli *utežen graf*. Če ima vsaka točka grafa sodo stopnjo, torej je graf Eulerjev, bo kar Eulerjev obhod rešitev tega problema, saj lahko vsako povezavo prehodimo natanko enkrat. V resničnem svetu pa se težko zgodi, da križišča in ulice mest tvorijo Eulerjev graf. Nekatere povezave je zato treba prehoditi dvakrat - te povezave v grafu podvojimo (s tem se poveča stopnja točk, na katerih so napete te povezave). Optimalna rešitev je tista, pri kateri podvojimo čimkrajše povezave in najdemo tak Eulerjev graf G^*, v katerem je G podgraf.

Zapišimo standardni algoritem za iskanje optimalnega poštarjevega cikla. V algoritmu bomo uporabili pojem popolnega prirejanja. *Prirejanje* v grafu G je takšna podmnožica M množice povezav grafa G, da nobeni povezavi v M nimata skupne točke. *Popolno prirejanje* v grafu G pa je prirejanje grafa G, v katerem je vsaka točka končna točka ene od povezav.

1. Imamo povezan utežen graf G.

2. Najdemo vse točke lihe stopnje v grafu G, naj bo L množica lihih točk.

3. Za vsak par točk u in v iz L

   najdemo najkrajšo pot P v grafu G med njima. Naj bo $d(u, v)$ dolžina poti P.

4. Skonstruiramo polni graf K s točkami iz L.
5. Vsaki povezavi e v K priredimo težo $d(u, v)$, kjer sta u in v krajišči povezave e.
6. Najdemo popolno prirejanje M grafa G tako, da je skupna teža lokov v M najmanjša.
7. Za vsako povezavo e v M naredimo naslednje:

   Naj bo P pripadajoča najkrajša pot v G med krajišči povezave e.

   Vsaki povezavi f na poti P dodaj grafu G njen dvojnik skupaj s njeno težo.
8. Dobljeni graf je prej omenjeni Eulerjev graf G^*.
9. Eulerjev obhod v tem grafu je iskana optimalna poštarjev cikel.

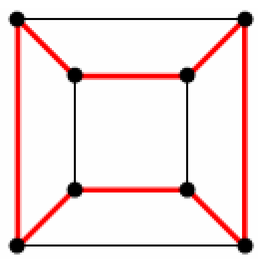
3 Hamiltonovi grafi

Za razliko od Eulerjevih grafov pa bomo zdaj iskali pot v grafu, v kateri bomo natanko enkrat prehodili vsako točko (torej vpeto pot).

Če bo taka pot cikel, ji bomo rekli *Hamiltonov cikel*, grafu pa *Hamiltonov*, sicer pa *Hamiltonova pot*.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) je bil Irec, eden najbolj plodnih matematikov svoje dobe. Bil je čudežni otrok. Izmislil si je ti. *ikozaedrsko igro* (Icosian game, tudi Hamilton's puzzle). Bistvo igre najti Hamiltonov cikel na dodekaedru, kateremu oglišča označimo s črkami. Prvih pet črk je že izbranih. Problem je rešil s pomočjo ikozaedrskega računa, algebrajske strukture, ki je osnovana na korenih enote z podobnostmi kvaternionov (spomnimo se, oznaka obsega kvaternionov je prav zaradi Hamiltona $\mathbb{H}$).

Zgled. Zgled Hamiltonovih grafov so hiperkocke Q_n (na sliki 3 je Q_3 z enim od možnih Hamiltonovim ciklom).



Slika 3: Q_3

Zgled. Požrešni šahovski konjiček je primer uporabe Hamiltonovih grafov. Imamo šahovnico velikosti $m \times n$ ter figuro skakača (konja). Zanima nas, ali lahko preskačemo šahovnico tako, da vsako polje obiščemo natanko enkrat in se pri tem morebiti celo vrnemo na začetek (torej, ali obstaja tako zaporedje skokov). To je ravno iskanje Hamiltonovega cikla / poti. Polja so točke, neko polje pa je povezano z drugim, če lahko skakač iz prvega polja skoči na drugega (črka L). V slučaju, ko je dimenzija šahovnice 4×4, naloge ne moremo rešiti (to bomo pokazali kasneje), pri kakšni drugi dimenziji šahovnice (npr. 8×8 ali 4×3) pa je to možno.

Pri Eulerjevih grafih smo imeli izrek, ki nam je povedal, kdaj je nek poljuben graf Eulerjev, kdaj pa ne. Zadostnega pogoja, kdaj je neki poljuben graf Hamiltonov, pa žal ne poznamo. Če hočemo za splošen graf pokazati, da je Hamiltonov, je edini način, da najdemo Hamiltonov cikel v grafu, obstaja pa način, da dokažemo, da graf ni Hamiltonov.

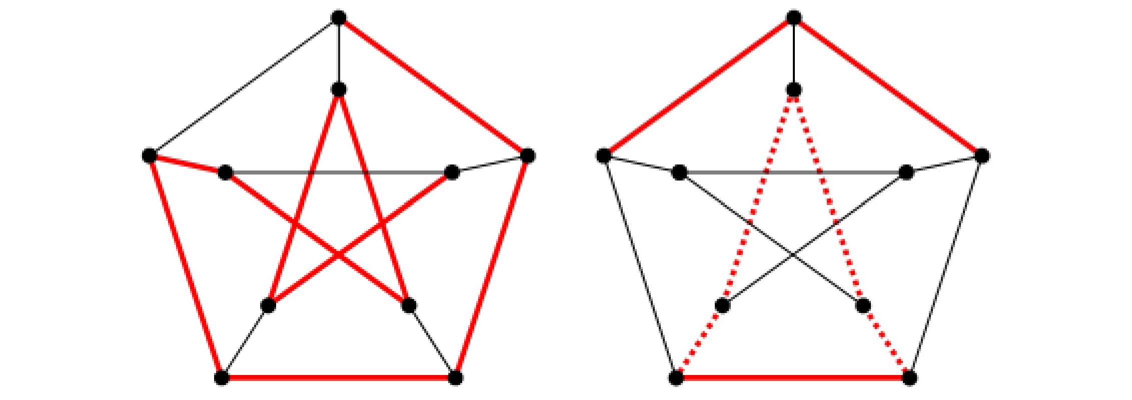
Poznamo potrebni pogoj za obstoj Hamiltonovega cikla oz. Hamiltonove poti, ki ga zapišimo v izreku.

Izrek 3.1 (Osnovni potrebni pogoj) *Če iz grafa G odstranimo k točk in pri tem graf razpade na več kot k komponent, tedaj graf G ni Hamiltonov. Če je komponent več kot $k+1$, potem v grafu G ni niti Hamiltonove poti.*

Dokaz: Recimo, da v grafu G obstaja Hamiltonov cikel oz. pot. Če iz grafa odstranimo k točk, cikel razpade na največ k delov (pomagajmo si s skico), pot pa na največ $k+1$ delov. Vsak od teh delov leži v eni komponenti, na katere razpade graf, in vsaka komponenta vsebuje vsaj en del. Torej graf ne more razpasti na več kot k oz. $k+1$ delov. ■

Opomba: *Iz te trditve sledi tudi, da je vsak Hamiltonov graf 2-povezan.*

Zgled. Petersenov graf ($P_{5,2}$)
Petersenov graf ima več Hamiltonovih poti (ena od njih je levem delu slike 4), nima pa Hamiltonovega cikla.



Slika 4: Petersenov graf

Recimo, da v Petersenovem grafu obstaja Hamiltonov cikel. Ta mora vsebovati 3 ali 4 povezave zunanjega 5-cikla grafa. Če vsebuje 4 povezave, ga ne moremo zaključiti po notranjem 5-ciklu, saj točki, ki sta zaporedni na zunanjem ciklu, na notranjem nista sosednji. Torej mora cikel vsebovati 3 zunanje povezave. Ampak potem mora vsebovati tudi povezave v notranjosti označene pikčasto (glej desni del slike 4). Dobimo protislovje.

Opomba: *Grafu G, ki ni Hamiltonov, je pa Hamiltonov graf $G - v$ za vsako točko v grafa G, rečemo Hipohamiltonov graf.*

Če je graf dvodelen, je še lažje pokazati, da ni Hamiltonov.

Posledica 3.2 *Naj bo G dvodelen graf z razbitjem $V(G) = X \cup Y$. Če je $|X| \neq |Y|$, potem G nima Hamiltonovega cikla, če velja še $||X| - |Y|| > 1$, potem G ne vsebuje niti Hamiltonove poti.*

Dokaz: Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $|Y| > |X|$. Graf $G - X$ ima potem $|Y|$ komponent in po prejšnjem izreku G ni Hamiltonov. Iz $|Y| \geq |X| + 2$ sledi, da je za graf $G - X$ število komponent $|Y| + 2$. Torej graf nima Hamiltonove poti. ■

Če je neki graf Hamiltonov in mu dodamo še nekaj povezav, potem dobimo spet Hamiltonov graf (Hamiltonov cikel je kar isti kot prej). Torej je za graf z veliko povezavami bolj verjetno, da je Hamiltonov, kot za graf z malo povezavami. Za grafe z "veliko"točkami poznamo tudi zadostne pogoje za Hamiltonost.

Če sta v grafu točki u in v povezani, tj. obstaja povezava med njima, tedaj pišemo $u \sim v$.

Trditev 3.3 *Naj bosta u in v taki nesosednji točki grafa G, da je* $\deg(u)+\deg(v) \geq |V(G)|$. *Potem je graf $G + uv$ Hamiltonov natanko tedaj, ko je G Hamiltonov.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Očitno. Hamiltonov cikel v G je tudi Hamiltonov cikel v $G + uv$.
($\Leftarrow$) Recimo, da je $G + uv$ Hamiltonov. Naj bo C Hamiltonov cikel v $G + uv$. Če povezava uv ni na ciklu, potem je to cikel tudi v G. Zato predpostavimo, da je povezava uv na ciklu C. Zaradi tega je $C - uv$ Hamiltonova pot v G. Trdimo, da obstajata zapoderni točki x, y na poti od u do v tako, da je $u \sim y$ in $x \sim v$. Če obstajata taka x in y, potem je $u \to x \to v \to y \to u$ Hamiltonov cikel. Dokažimo obstoj x in y: Točka u ima $\deg(u)$ sosedov. Recimo, da točka v ni sosednja nobenemu predhodniku teh točk. Za sosede točke v lahko ostane le $|V(G)| - \deg(v) - 1 \geq \deg(w)$ kandidatov. To pa je protislovje. ■

Izrek 3.4 (Orejev izrek) *Naj ima graf G vsaj tri točke in naj za poljubni nesosednji točki u in v velja* $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. *Potem je G Hamiltonov.*

Dokaz: Po prejšnji trditvi grafu G dodajamo povezave. $G_0 := G, G_1 = G_0 + u_0v_0, G_2 = G_1 + u_1v_1, \ldots G_n = K_n$ (poln graf na n točkah). $G_n = K_n$ je poln graf, zato je Hamiltonov. Po trditvi velja: ali so vsi grafi G_i Hamiltonovi ali ni nobeden. Zato morajo biti vsi, torej je tudi graf G Hamiltonov. ■

Izrek 3.5 (Diracov izrek) *Če ima graf G vsaj tri točke in velja* $\deg(w) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$ *za vsako točko w, potem je G Hamiltonov.*

Dokaz: Naj za vsako točko w grafa G velja $\deg(w) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Sledi $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{|V(G)|}{2} + \frac{|V(G)|}{2} = |V(G)|$. Po Orejevem izreku sledi, da je G Hamiltonov. ■

Obstajata različici zadnjih dveh izrekov za digrafe. Pri Orejevem izreku moramo spremeniti predpostavke takole: $\mathrm{outdeg}(u) + \mathrm{indeg}(v) \geq |V(G)|$ za vsaki nesosednji točki u in v, pri čemer pomeni $\mathrm{indeg}(w)$ vhodna stopnja, $\mathrm{outdeg}(w)$ pa izhodna stopnja točke w. Pri Diracovemu izreku so pogoji: $\mathrm{outdeg}(v) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$ in $\mathrm{indeg}(v) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$ za vsako točko v.

Hamiltonost se uporablja pri problemu trgovskega potnika. Trgovski potnik ima nalogo obiskati nekaj mest (vsako natanko enkrat) in se vrniti domov. Poznamo tudi razdalje med posameznimi mesti, prevožena (prehojena) pot mora biti najmanjša možna.

Literatura

[1] R. Diestel: *Graph Theory. New York: Springer, 2000.*

[2] J. Gross in J. Yellen: *Graph Theory and its Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.*

[3] M. Juvan in P. Potočnik : *Teorija grafov in kombinatorika. Ljubljana: DMFA, 2000.*

[4] T. Juvančič: *Diplomsko delo: Uporaba metode kitajskega poštarja na delu ljubljanske cestne mreže. Ljubljana: UL, Ekonomska fakulteta, 2005.*

[5] D. B. West: *Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.*

[6] R. Wilson in J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov. Ljubljana: DMFA, 1997.*

[7] *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike I, šolsko leto 2005/06.*